Licenciaturas en Matemáticas y en Computación
Universidad de Guanajuato
Tarea 10 de Álgebra Lineal II: Forma Canónica Real de Jordan.
lunes 5 de noviembre de 2012
Fecha de entrega: lunes 12 de noviembre de 2012.

Definición Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con coeficientes reales existe una matriz en bloques de Jordan que es similar a A. Usando el ejercicio 4 de la tarea 8, se deduce que existe una matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, con coeficientes reales y similar a A, de la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & B_k \end{pmatrix}$$

donde cada bloque B_j es de Jordan con coeficientes reales o de la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ I & D & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I & D \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $a_j + ib_j$ son los valores propios de A. Salvo reordenamiento de los bloques la matriz B es única. Dicha matriz se denomirá forma canónica real de A.

1. Encuentre la forma canónica real del operador (endomorfismo)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Sea A una matriz real de 3×3 no diagonalizable. Si $(A+I)^2 = 0$, encuentre la forma canónica real de A.

3. Pruebe o dé un contraejemplo: Toda matriz real de $n \times n$ es similar a su transpuesta.

4. Demuestre que todo operador lineal A (o endomorfismo) en un espacio real de dimensión n tiene un subespacio invariante de dimensión 2.